Equation de la chaleur

⇒ **Refs :** ZQ p106-108 (existence) et Bernis & Bernis p92-9 (unicité).

Théorème : Soit h une fonction de classe C^1 sur $[0,L]$ telle que $h(0)=h(L)=$
On note $Q =]0,L[\times]0,+\infty[$ et $\overline{Q} = [0,L] \times [0,+\infty[$. Alors il existe une unique fonction u telle que :

1) $u \in C^0(\overline{Q})$, $u \in C^{2,1}(Q)$, (C^2 p/r à x et C^1 p/r à t)
2) pour tout $(x,t) \in Q$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$,
3) pour tout $t \in [0,+\infty[$, $u(0,t) = u(L,t) = 0$, ⇒ température nulle aux extrémités
4) pour tout $x \in [0,L]$, $u(x,0) = h(x)$. ⇒ température initiale donnée par h.

De plus, u est de classe C^∞ sur Q.

Preuve du théorème : Nous allons d'abord montrer l'existence d'une solution, et pour cela nous allons faire une sorte d'analyse-synthèse. Pour essayer d'obtenir une piste pour la forme des solutions nous allons utiliser la méthode de séparation des variables.
Soit u une solution du problème étant de la forme $u(x,t) = f(x)g(t)$, alors 2) équivaut à $f(x)g'(t) = f''(x)g(t)$ pour tout $(t,x) \in Q$.
Supposons que f et g ne s'annule pas sur $]0,\pi[$ et $\mathbb{R}_+^*$ respectivement.
Alors 2) équivaut à : $\forall (x,t) \in Q$, $\dfrac{f''(x)}{f(x)} = \dfrac{g'(t)}{g(t)}$.

Ainsi les deux termes sont constants donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]0,L[$, $f''(x) = \lambda f(x)$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(t) = \lambda g(t)$.
Nous allons faire une disjonction de cas en fonction de λ. Supposons que h ne soit pas identiquement nulle (sinon, la fonction nulle est solution).

- Si $\lambda > 0$, alors $f(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$ pour A et B dans $\mathbb{R}$, et la condition 3) implique $\begin{cases} A+B=0 \\ Ae^{\sqrt{\lambda}L} + Be^{-\sqrt{\lambda}L} = 0 \end{cases}$, donc $A=B=0$, $f \equiv 0$ et ainsi $u \equiv 0$, ce qui contredit 4).

- Si $\lambda = 0$, alors $f(x) = Ax+B$ pour A et B dans $\mathbb{R}$, et cette fois la condition 3) implique $\begin{cases} B=0 \\ A \times L + B = 0 \end{cases}$, d'où $A=B=0$ de nouveau, et donc encore $u \equiv 0$ ⇒ contradiction.

- Si $\lambda < 0$, on écrit $\lambda = -\xi^2$, alors $f(x) = A\cos(\xi x) + B\sin(\xi x)$ pour $A, B \in \mathbb{R}$ et $g(t) = Ce^{-\xi^2 t}$ pour $C \in \mathbb{R}$, et la condition 3) implique
$\begin{cases} A=0 \\ A\cos(\xi L) + B\sin(\xi L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B\sin(\xi L)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ \xi = \frac{n\pi}{L} \end{cases}$ pour un $n \in \mathbb{Z}$ (car $u \not\equiv 0$ donc $B \neq 0$)

Ainsi, on obtient une famille de solutions qui vérifient 1), 2) et 3) :
$\{u_n : (x,t) \mapsto b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t},\ b_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Cependant, a priori ces solutions n'ont aucune raison de vérifier 4) ie de vérifier $\forall x \in]0,L[,\ h(x) = b_n \sin(nx)$.

Idée : Puisqu'une somme finie de u_n vérifie toujours 1), 2) et 3), on va essayer de trouver une solution sous la forme $u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ telle que u vérifie toujours 1), 2) et 3) et u vérifie 4) ie telle qu'on ait pour tout $x \in [0,L]$, $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$ $\rightarrow$ cela fait penser aux séries de Fourier !! Passons à la synthèse.

On définit $\tilde{h}$ le prolongement impair, $2L$-périodique de h sur $\mathbb{R}$:
$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in [0,L] \\ -h(-x) & \text{si } x \in [-L,0] \end{cases} \quad \text{et } \tilde{h} \text{ est } 2\text{-périodique}$$

Alors, puisque $h \in C^1([0,L])$ et $h(0) = h(L)$, la fonction $\tilde{h}$ est continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Ainsi d'après un corollaire au théorème de Fejer, sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{h}$ (cf rappel), et puisque $\tilde{h}$ est impaire, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tilde{h}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, où pour tout $n \geq 1$,
$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} \underbrace{\tilde{h}(u)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}_{\text{impaire} \times \text{impaire} = \text{paire}} dx = \frac{2}{L}\int_0^L h(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$
(et $\tilde{h} = h$ sur $[0,L]$)

En particulier, puisque $\tilde{h} = h$ sur $[0,L]$, on a pour tout $x \in [0,L]$,
$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

On définit alors pour $(x,t) \in \bar{Q}$, $u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \overbrace{b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}}^{=: u_n(x,t)}$,
bien définie car $|u_n(x,t)| \leq |b_n|$ et $\sum |b_n|$ converge.

Alors par construction, u vérifie 4). On voit également qu'elle vérifie 3). Reste à montrer qu'elle vérifie 1) et 2). Tout d'abord, u est continue sur $\bar{Q}$ (la série $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément et les u_n sont continues sur $\bar{Q}$). Nous allons maintenant, pour montrer le reste, utiliser un théorème de dérivation sous le signe somme pour montrer que u est C^∞ sur Q :

* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in C^\infty(Q)$
* Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$. Soit $n \geq 1$ et $(x,t) \in]0,L[\times [\varepsilon, +\infty[$, alors
$$\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta} u_n}{\partial x^\alpha \partial t^\beta}(x,t)\right| \leq |b_n| \times \left(\frac{n\pi}{L}\right)^\alpha \left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)^\beta e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

donc $\left|\dfrac{\partial^{\alpha+\beta}u_n}{\partial x^\alpha \partial t^\beta}(x,t)\right| \leq \underbrace{|b_n|}_{\text{borné car } \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \times \left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^{\alpha+2\beta} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\varepsilon}$.

$\rhd$ terme général d'une série convergente.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\partial^{\alpha+\beta}u_n}{\partial x^\alpha \partial t^\beta}$ converge normalement (donc uniformément) sur tout compact de Q.

Ainsi, on en déduit que u est de classe C^∞ sur Q (donc en particulier 1) est vérifié) et on peut dériver terme à terme : pour tout $(x,t)\in Q$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,t)\right) = 0$$

Donc u vérifie 2) et ainsi u est solution du problème.

(Bonus) Passons maintenant à l'unicité.

Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème et $w = u_1 - u_2$. Alors w est solution du même problème pour $h\equiv 0$. On veut montrer que $w\equiv 0$.

On pose pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $e(t) = \displaystyle\int_0^L w^2(x,t)\,dx$.

Alors on peut utiliser le théorème de dérivat° sous l'intégrale (en se plaçant sur un compact de $\mathbb{R}_+$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ étant continue et $[0,L]$ compact aussi, on peut borner par une constante sur $[0,L]\times K$, et la constante est intégrable sur $[0,L]$), et pour tout $t\in\mathbb{R}_+$,

$$e'(t) = 2\int_0^L w\frac{\partial w}{\partial t}(x,t)\,dx = 2\int_0^L w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,dx$$

$$= \underbrace{2\left[w\frac{\partial w}{\partial x}\right]_0^L}_{=0} - 2\int_0^L \frac{\partial w}{\partial x}\times\frac{\partial w}{\partial x}\,dx$$

$$= -2\int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx$$

, donc $e'(t)\leq 0$, alors e est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+$, nulle en 0, donc $e\equiv 0$.

Ainsi, puisque w^2 est positive et continue, on en déduit que $w^2\equiv 0$ donc $w\equiv 0$ sur $\overline{Q}$. Ainsi $u_1 = u_2$, d'où l'unicité.

Avant de passer aux remarques, quelques rappels sur Fejér et le corollaire :

Théorème de Fejér : $\ast$ Si $f\in C^0_{2\pi}$, alors $\|K_N * f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\|K_N * f - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$\ast$ Si $f\in L^p_{2\pi}$ ($p\in[1,+\infty[$) alors $\|K_N * f\|_p \leq \|f\|_p$ et $\|K_N * f - f\|_p \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Corollaire : Si $f \in C_{2\pi} \cap C^1_{pm}$, alors sa série de Fourier CVN sur $\mathbb{R}$ et $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$.

Preuve : $f \in C_{2\pi} \cap C^1_{pm}$ donc $c_n(f') = in\, c_n(f)$, et f' est C^0_{pm} sur $[0, 2\pi]$, en particulier $f' \in L^2_{2\pi}$, alors par la formule de Parseval* on a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n(f)|^2 = \|f'\|_2^2 < +\infty$.

Par Cauchy-Schwarz, on a $\sum_{1 \leq |n| \leq N} |c_n(f)| \times \frac{|n|}{|n|} \leq \left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \times \left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} n^2 |c_n(f)|^2 \right)^{1/2}$

$$\leq \left(2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \|f'\|_2$$

$$< +\infty$$

D'où la convergence normale associée.

*C'est ça qui découle de Fejer car Fejer nous permet d'en déduire que les e_n sont une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

Remarques : * On peut prouver l'unicité autrement grâce au principe du maximum pour l'équation de la chaleur :
Soit $u \in C^0(\overline{Q}) \cap C^2(Q)$ telle que $Pu(x,t) \geq 0$ sur Q, où $P = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}$; soit $T > 0$ et $K = [0, L] \times [0, T]$, alors $\sup_K u = \sup_{K \cap \partial Q} u$.
(mais c'est plus dur).

* Fourier avait globalement fait comme ça à son époque, et c'est comme ça que sont nées les séries de Fourier !

* Le théorème reste vrai si $h \in C^0([0, L])$, il y a alors des histoires de convolution avec une approximation de l'unité.

* On peut appliquer cette méthode à d'autres équations, comme l'équation des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, ou l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.